

$T > 0$  を, あるイベントが起こるまでの時間を表す確率変数とする.

**確率密度関数 (probability density function)**

$$f(t), \forall t > 0, f(t) > 0.$$

**累積分布関数 (cumulative distribution function)**

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u)du, \forall t > 0, 0 \leq F(t) \leq 1, F(t) \text{ は, 単調非減少関数.}$$

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(u)du = f(t) : \text{微分積分学の基本定理}$$

**生存関数 (survival function)**

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(u)du,$$

$$\forall t > 0, 0 \leq S(t) \leq 1, S(0) = 1, S(\infty) = 0, S(t) \text{ は, 単調非増加関数.}$$

$$\frac{d}{dt}S(t) = \frac{d}{dt}(1 - F(t)) = -f(t)$$

**ハザード関数 (hazard function)**

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < (t + \Delta t) | T > 0)}{\Delta t}$$

- ハザード関数と確率密度関数, 生存関数との関係

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < (t + \Delta t) | T > 0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(\{t < T < (t + \Delta t)\} \cap \{T > t\})}{P(T > t)} \\ &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < (t + \Delta t))}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{S(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{1}{S(t)} \frac{d}{dt}F(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \end{aligned}$$

- ハザード関数と生存関数の関係

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log S(t) &= \frac{1}{S(t)} \frac{d}{dt}S(t) = \frac{1}{S(t)}(-f(t)) = -\frac{f(t)}{S(t)} = -h(t) \\ h(t) &= -\frac{d}{dt} \log S(t) \end{aligned}$$

**累積ハザード関数 (cumulative hazard function)**

$$H(t) = \int_0^t h(u)du$$

- 累積ハザード関数と生存関数の関係

$$H(t) = \int_0^t h(u) du = \int_0^t -\frac{d}{du} \log S(u) du = -\log S(t)$$

$$S(t) = e^{-H(t)}$$

ここで、生存関数の補対数対数 (complementary log-log) を取ると、

$$\log(-\log S(t)) = \log(-\log e^{-H(t)}) = \log H(t) = \log \int_0^t h(u) du$$

Cox 比例ハザードモデルにおいて、比例ハザード性が成り立っているとする

$$h(t) = h_0(t) \exp\{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k\}$$

よってこのとき、以下が成立する。

$$\begin{aligned} \log(-\log S(t)) &= \log \int_0^t h_0(u) \exp\{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k\} du \\ &= \log \left( \exp\{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k\} \int_0^t h_0(u) du \right) \\ &= \log(\exp\{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k\}) + \log \left( \int_0^t h_0(u) du \right) \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \log(-\log S_0(t)) \end{aligned}$$

したがって、もし比例ハザード性が成り立っているとする、時間  $t$  あるいは  $\log t$  に対して  $\log(-\log S(t))$  (= 累積ハザード関数の対数) をプロットすると、異なる共変量に対して切片  $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$  の分だけ平行移動した  $\log(-\log S_0(t))$  の平行な線が描かれるはずである。

逆に言えば、層の間で補対数対数プロットが平行でないときは、比例ハザード性の仮定が成立していない。