医学統計勉強会

第2回　推定　信頼区間　仮説検定

帝京大学臨床研究センター（TARC）・帝京大学大学大学院公衆衛生学研究科　共催

帝京大学大学大学院公衆衛生学研究科

宮田　敏

パラメターの推定

データ解析では，様々なパラメターが推定される.

- 期待値 $\mu = E(X)$
- 割合（成功確率） $p = P(X=1),\ X = \begin{cases} 1 : \text{event occurrence} \\ 0 : \text{no event} \end{cases}$
- 回帰係数 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i$
- オッズ比：ロジスティック回帰モデル

  $e^{\beta_j}\ :\ \log(p_i/(1-p_i)) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik}$
- ハザード比：Cox比例ハザードモデル

  $e^{\beta_j}\ :\ h(t|x_i) = h_0(t)\exp\{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik}\}$

定義:

点推定：未知母数の推定問題における，標本から計算される推定量の値による推定

区間推定：真の母数を含む確率がある値以上になるように，区間を求めることによる推定

点推定

Parameter (Estimand)	推定量(Estimator)
μ : 母集団平均	$\overline{X}$: 標本平均
σ^2 : 母集団分散	S^2: 標本分散
p : 成功確率	X/n: X=成功回数

パラメーターは，サンプルから計算した推定量（estimator）を用いて推定される．

- 期待値　⇒　標本平均 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
- 割合　⇒ $\hat{p}=\frac{X}{n}$　X：イベント数，n：試行回数

その他のモデルの推定量も，統計ソフトで計算できる．
推定量の観測値 = 推定値（estimate）をもって，パラメーターの値を推定する．

推定量はサンプルから計算されるが，サンプルには観測誤差が含まれる．

例：ある疾患の罹患率を調べるとする．n=10 人のサンプルを調べたところ，疾患に罹患していたのは x=0 人であった．罹患率の推定値はである．

$$\hat{p} = 0/10 = 0$$

このとき，その疾患の罹患率は 0% である，と結論づけてよいのであろうか？

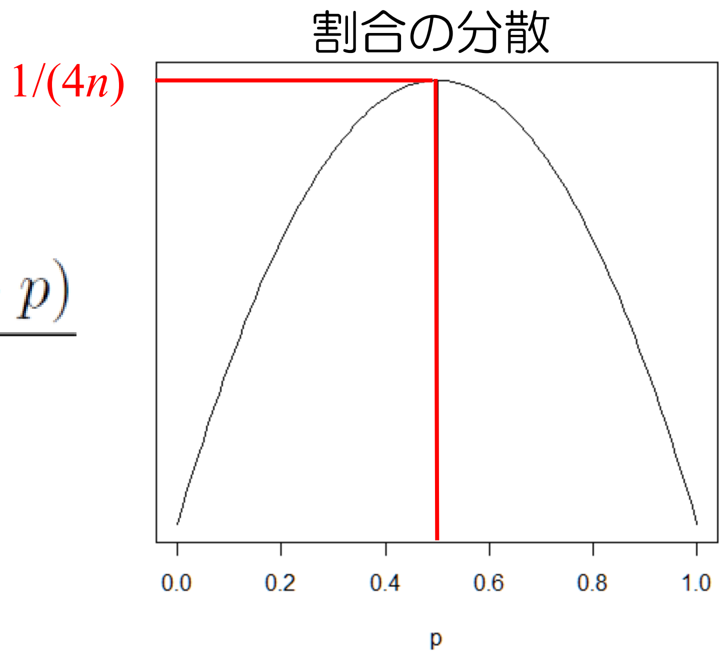
例えば本当の罹患率は 3% であるのに，たまたま n=10 人の中に罹患した人がいなかっただけではないのか？

もう一度別の10人を調べたら，今度は一人罹患者がいて $\hat{p} = 1/10 = 0.1$ となることも有るのでは無いか？

推定量はサンプルから計算されるが，サンプルには確率的な変動や観測誤差が含まれる.

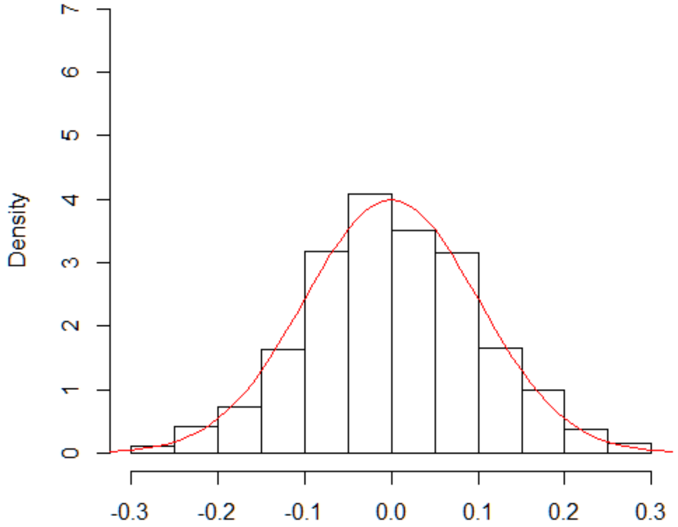
⇒　推定量にも，観測誤差=分散がある.
⇒　サンプリングのたびに，推定値にはばらつきがある.
⇒　サンプル数 n が増えれば，分散が小さくなる.

$$\mathrm{var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$



推定量の観測値=推定値からは，推定の精確さは評価できない．
サンプル数が大きくなると，推定量の分散あるいは標準誤差(standard error) は小さくなる．

標本平均の分布 (n=100)

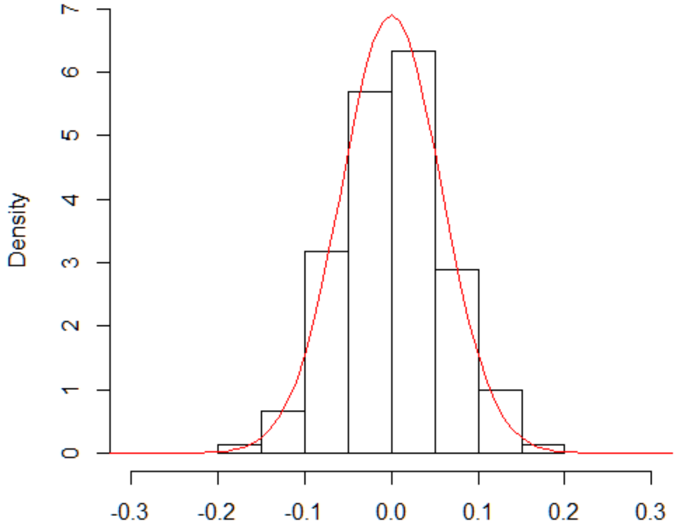


サンプル数の増加

標本平均の分散

$$\frac{\sigma^2}{n}$$

標本平均の分布 (n=300)



2. 信頼区間

点推定量は未知パラメター θ に対して数値的な情報を与えるが，推定の正確さ，信頼度については何の情報も与えない．
　推定の信頼度を示すような，「もっともらしい」推定値の区間（集合）が有用である．

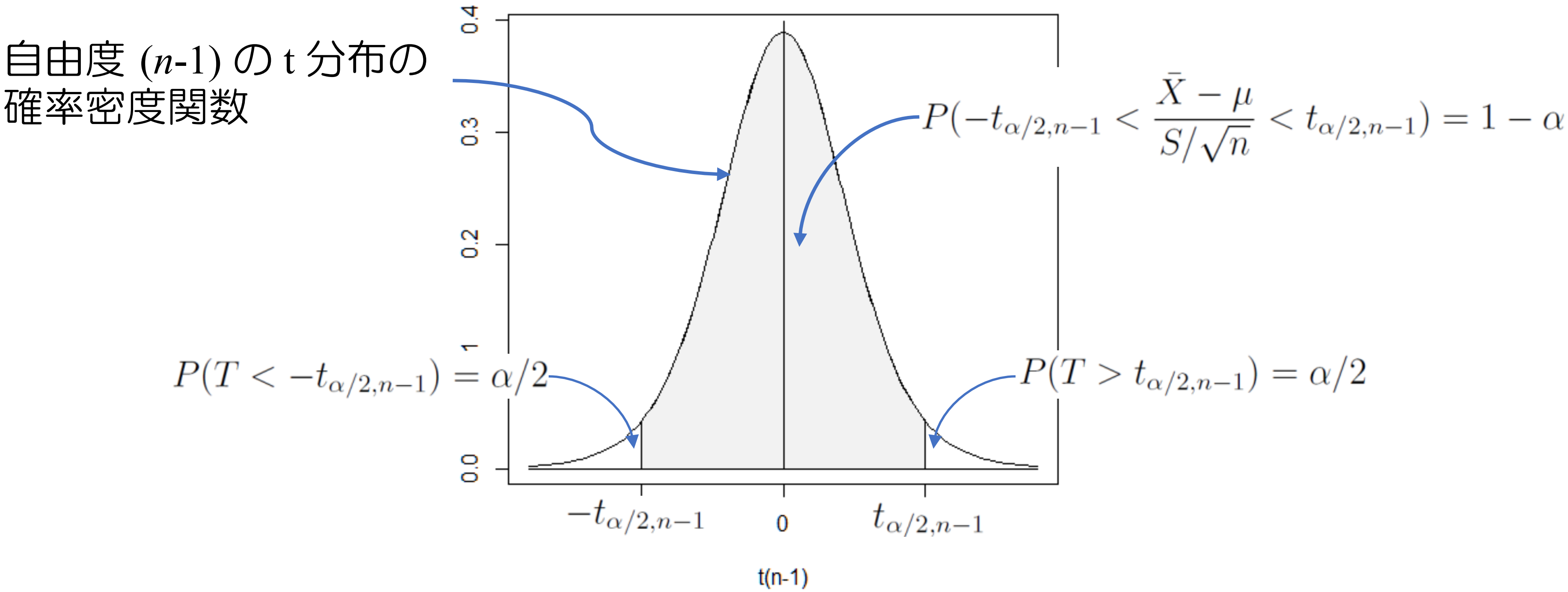
Definition: Parameter θ に対して，以下の条件を満たす確率的な区間(二つの確率変数の組) $(l(X_1,\ldots,X_n), u(X_1,\ldots,X_n))$を区間推定量という．

$$P(l(X_1,\ldots,X_n) \le \theta \le u(X_1,\ldots,X_n)) = 1-\alpha.$$

信頼水準 (confidence level) $(1 - \alpha)$ の信頼区間 (confidence intervall, CI) とは，区間推定量の $(X_1,\ldots,X_n)$ に観測値 $(x_1,\ldots,x_n)$ を代入した区間である．

例： $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ 独立かつ同一の期待値 μ 分散 σ^2 の正規分布に従うとする.
この時，以下の T は自由度 $(n\text{-}1)$ の t 分布に従うことが知られている.

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



平均の信頼区間の導出

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$-t_{\alpha/2,n-1} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2,n-1}$$

左辺括弧内の不等式

$$\Longleftrightarrow -t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

各項に $S/\sqrt{n}$ を掛ける

$$\Longleftrightarrow -\bar{X}-t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X}+t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

各項から $\bar{X}$ を引く

$$\Longleftrightarrow \bar{X}+t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{X}-t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

各項に-1 を掛ける

$$P\left(\bar{X}-t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\mathrm{CI}: (\bar{x}-t_{\alpha/2,n-1}\times s/\sqrt{n}, \bar{x}+t_{\alpha/2,n-1}\times s/\sqrt{n})$$

2. 信頼区間

　推定量を標準誤差（あるいはその推定量）で割ったものは，標準正規分布（あるいは t 分布）などに従う.

期待値の信頼区間

$$\left(\bar{X}-t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

サンプル数 n が大きくなると，信頼区間の幅は小さくなる.

推定量と信頼区間の組み合わせで，観測誤差も含めたパラメターの量的な推測が可能になる.

３. 仮説検定

帰無仮説 (Null hypothesis)： H_0 母集団に関する命題で，検定の当初，真であると仮定されるもの.

対立仮説 (Alternative hypothesis) : H_1 帰無仮説 H_0 と対立する仮説.

Type I error : H_0 が真であるとき H_0 を棄却する過誤

Type II error : H_0 が偽であるとき H_0 を棄却しない過誤

有意水準(Significance level) α : 事前に決められた定数で，検定は $P(\text{type I error}) = \alpha$ となるように定められる

	H_0 is true	H_1 is true
Accept H_0	○	Type II error
Reject H_0	Type I error	○

Type I errorとType II errorの確率を同時に小さくすることは不可能.
仮説検定はP(type I error) = α となる範囲の中で，type II errorの確率が最も小さくなるようにデザインされている.

検定統計量 (Test statistic)：標本から計算される統計量で，それを用いて検定の決定を行うもの.

棄却域 (Rejection region)：検定統計量がとりうる値の集合のうち，H_0が棄却される領域.

例： $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu = \mu_1 (> \mu_0)$$

検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}}_{\sim t(n-1)} + \frac{\mu - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \begin{cases} = 0\text{: under } H_0 \\ > 0\text{: under } H_1 \end{cases}$$

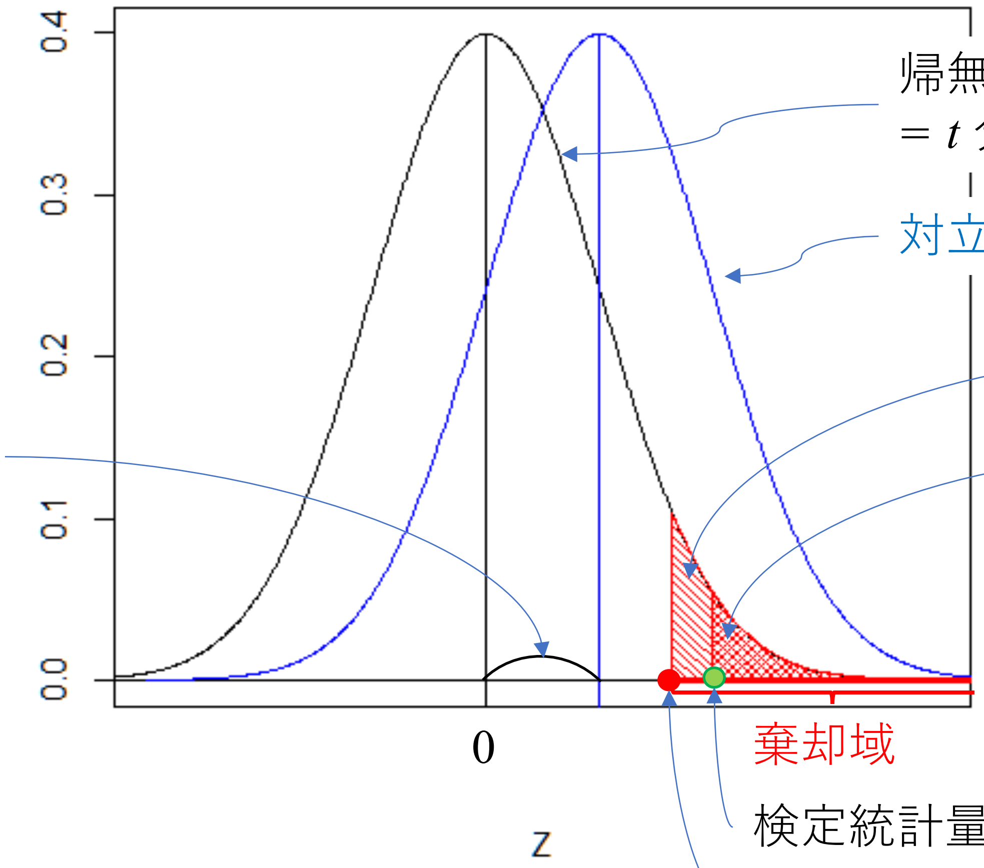
信頼区間を導出したときの

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

と似ている.

すなわち，検定統計量は帰無仮説の元では t 分布に従い，対立仮説の元では t 分布を正の方向にシフトした分布に従う．$H_1 : \mu = \mu_1 (> \mu_0)$ なる対立仮説の元では，検定統計量は「大きい」値をとりがちである.

3.



$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

帰無仮説の下での検定統計量の確率分布
＝ t 分布 $t(n\text{-}1)$

対立仮説の下での検定統計量の確率分布

有意水準 ＝ α

P-value

帰無仮説が正しい（⇔　真の効果や違いが無い）と言う仮定の下で、観察したのと同程度かさらに極端な違いを見せるデータが得られる確率

棄却域

検定統計量の観測値 t

t 分布の上側　α　パーセント点$t_{\alpha,n-1}$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu = \mu_1 (> \mu_0)$$

３．仮説検定（つづき）

仮説検定は，帰無仮説を棄却するか否かを結論するだけ．仮説検定で，効果（effect）の大きさを量的に評価することは出来ない．

単純に，サンプル数を増やせば帰無仮説を棄却しやすく，p値が小さくなる．帰無仮説が棄却されたからと言って，効果量（effect size）が大きいことを意味しない．

帰無仮説と対立仮説の違いが臨床的に意味のある違いであるかは，推定量，信頼区間を用いて別途評価する必要がある．